2.3.5 Die Produktregel

Satz:
Sei $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ eine Funktion mit beliebiger D_{max}. Dann gilt für die Ableitung:
$$k'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x)g'(x)$$

Beweis:
Sei $k(x) = f(x) \cdot g(x)$ eine Funktion mit beliebiger D_{max}.
$$k'^{(x)} = \lim_{h \to 0} \frac{k(x+h) - k(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} f(x+h)\frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x)\frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$$
$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\text{q. e. d.}$$

Beispiel:

$$k(x) = (x^3 - 2x + 5) \cdot (-3x^5 + x^2 - 1)$$
$$\Rightarrow f(x) = x^3 - 2x + 5$$
$$\Rightarrow g(x) = -3x^5 + x^2 - 1$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2$$
$$g'(x) = -3 \cdot 5x^4 + 2x = -15x^4 + 2x$$
$$\Rightarrow k'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) =$$
$$= (3x^2 - 2) \cdot (-3x^5 + x^2 - 1) + (x^3 - 2x + 5) \cdot (-15x^4 + 2x)$$