2.3 Ableitung und Stammfunktion

Mithilfe des Differentialquotienten kann man nun unterschiedliche Regeln herleiten, die uns das Berechnen der Ableitung erleichtern. Wir werden uns im Folgenden ein paar dieser Regeln herleiten.

2.3.1 Die Ableitung von x^n

Satz:
Für $n \in \mathbb{N}$ gilt[1]:
Die Ableitung der Funktion

$$f(x) = x^n$$

ist

$$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Beweis:

Sei $f(x) = x^n$Funktion mit $n \in \mathbb{N}$. Es gilt offensichtlich, dass diese Funktion für $D_{max} = \mathbb{R}$ differenzierbar ist.
Wir betrachten nun den Differentialquotienten:

$$\begin{aligned}
&\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)\cdot(x+h)\cdot \ldots \cdot(x+h) - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^n + \binom{n}{1}\cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n - x^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{n\cdot x^{n-1}h + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h\cdot\left(n\cdot x^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}\right)}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{n\cdot x^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}}{1} = \\
&= \lim_{h\to 0}\left(n\cdot x^{n-1} + \binom{n}{2}\cdot x^{n-2}h^1 + \cdots + h^{n-1}\right) = n\cdot x^{n-1}
\end{aligned}$$

q.e.d.

[1] In der Tat gilt die Formel tatsächlich auch für beliebige Werte $n \in \mathbb{R}$. Dies interessiert uns an dieser Stelle allerdings noch nicht und wird in späteren Kapiteln nochmal angesprochen. Außerdem gilt der Beweis hier nur für natürliche Zahlen, da wir die Definition des Binomialkoeffizienten nutzen. Die Koeffizienten kann man hier einfach aus dem Pascalschen Dreieck ablesen.