1. Gebrochen rationale Funktionen

1.1 Definition und Definitionsmenge

Eine Funktion der Form $\frac{Polynom1}{Polynom2}$ nennen wir gebrochen rationale Funktion.
Da wir im Bruch nicht durch die Null teilen dürfen, werden die Nullstellen des „Nennerpolynoms“ zu Definitionslücken in der Definitionsmenge.

Bsp.:

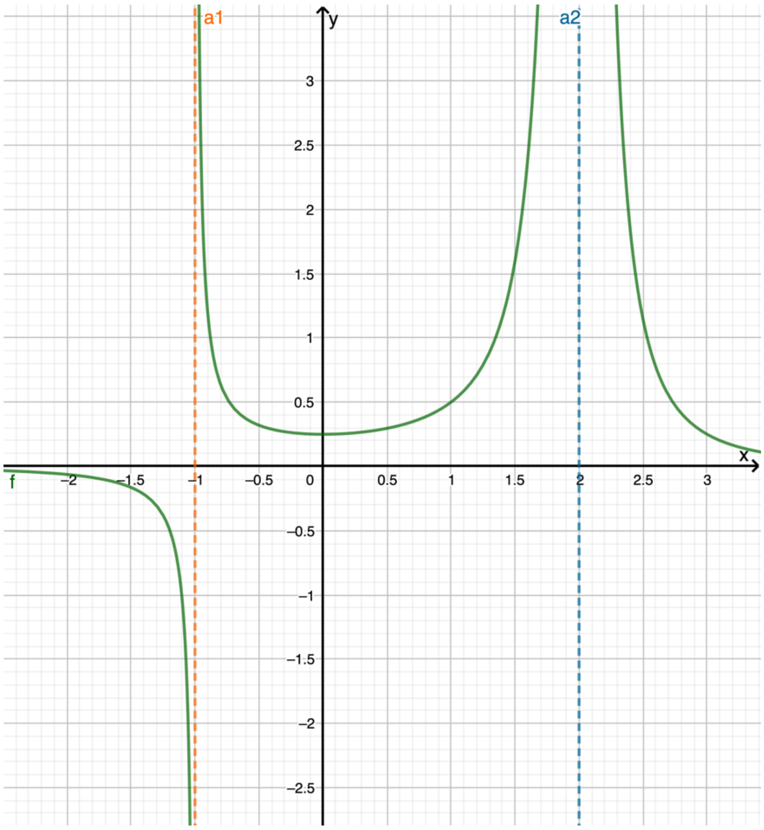
$k(x) = \frac{4}{(x-3)^2(x+2)} \Rightarrow ID_{max} = \mathbb{R} \setminus \{-2, 3\}$

An der Definitionslücke bildet der Graph meist[1] eine sogenannte Polstelle. An der Polstelle nähert sich der Graph einer senkrechten Asymptote[2] an (hier $x = 3$ und $x = -2$).

[1] Wenn eine Definitionslücke gleichzeitig Nullstelle des Zählers ist, entsteht eine hebbare Definitionslücke, die in Kapitel 1.4 behandelt werden.
[2] Zur Erinnerung: Eine Asymptote ist ein Funktionsgraph (meist der einer linearen Funktion) an die sich der Graph unserer Funktion im Unendlichen beliebig annähert.

1.2 Verhalten in der Umgebung der Definitionslücken

Wenn man verschiedene Polstellen betrachtet, fallen zwei Kategorien auf:



Bei der Funktion $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2(x+1)}$ bilden sich zwei Polstellen. Wir sehen zwei Asymptoten mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = 2$. Man unterscheidet nun diese Polstellen dadurch, ob der Graph von der anderen Seite der x-Achse zurückkommt, oder von der „gleichen" Seite.

Wir bezeichnen Polstellen, bei denen der Funktionswert auf beiden Seiten der Polstelle das gleiche Vorzeichen haben als „Polstellen ohne Vorzeichenwechsel" (im Bsp. bei x=2). Wenn das Vorzeichen wechselt, spricht man von einer „Polstelle mit Vorzeichenwechsel".

Mathematisch betrachtet formuliert man das so:

Ohne Vorzeichenwechsel

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x\to 2+0} f(x) &= \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = +\infty > 0 \\ \lim_{x\to 2-0} f(x) &= \lim_{x\to 2-0} \frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = +\infty > 0 \end{aligned}\right\} \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2+0} \frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = +\infty > 0$$

$$\lim_{x\to -1+0} f(x) = \lim_{x\to -1+0} \frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = -\infty < 0$$

$$\lim_{x\to -1-0} f(x) = \lim_{x\to -1-0} \frac{1}{(x-2)^2(x+1)} = +\infty > 0$$

Mit Vorzeichenwechsel

Wir erkennen, dass der Vorzeichenwechsel davon abhängt, ob die Nullstelle im Nenner eine gerade Vielfachheit (⇒ kein VZW) oder eine ungerade Vielfachheit (⇒ VZW) hat.