

Hefteintrag Exponentialgleichungen

Exponentialgleichungen

Bei der Vorhersage des Verlaufes einer Pandemie, können mathematische Modelle herangezogen werden. Es entstehen exponentielle Funktionen. Je nach Land ist der Coronavirus zu einem anderen Zeitpunkt aufgetreten.

Betrachten wir ein paar Daten:

Corona Fälle in Bayern (kumulativ):

2.März	3.März	4.März	5.März	6.März	7.März	8.März	9.März	10.März	11.März
31	37	47	69	118	135	154	238	339	451

(Quelle: corona.rki vom 28.4.2020)

Corona Fälle in der Türkei (kumulativ):

12.März	13.März	14.März	15.März	16.März	17.März	18.März	19.März	20.März	21.März
1	5	6	18	47	98	191	359	670	947

(Quelle: <https://www.worldometers.info/coronavirus/country/turkey/> vom 28.4.2020)

Aufgabe: Erstelle je eine Exponentialfunktion, die die Entwicklung der Coronafälle in Bayern und der Türkei modelliert. (Hinweis: Definiere den 2. März als Tag „0“. Dann wäre der 12. März Tag „10“). Damit muss nur $f(0)$ für die Türkei bestimmt werden.

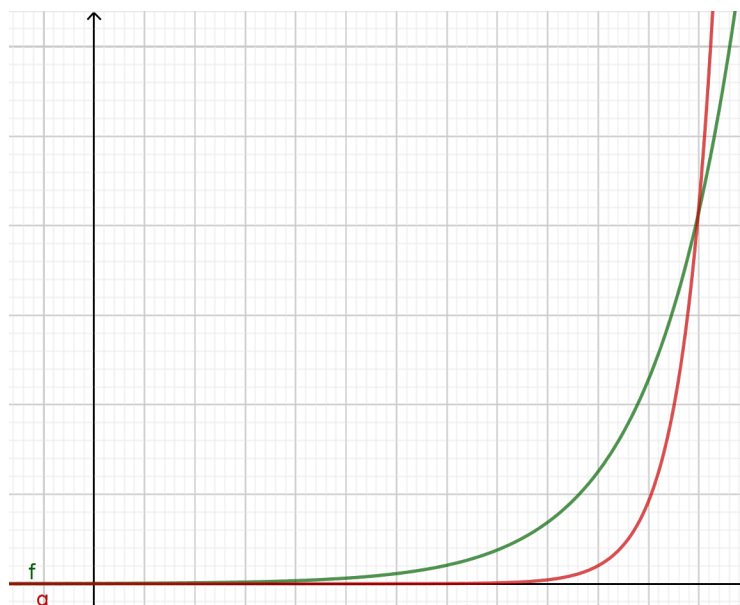
Die Verläufe lassen sich mit den zwei Funktionen

$$f_{\text{Bayern}}(x) = 31 \cdot 1,35^x \quad \text{und} \quad g_{\text{Türkei}} = 1 \cdot 2,14^{(x-10)}$$

beschrieben.

(Wiederholung: $f(0)$ bildet den Vorfaktor a in $a \cdot b^x$, der Wachstumsfaktor b wird geschätzt durch den Mittelwert der Faktoren, die von z.B. Tag 4 auf Tag 5 die Anzahl vervielfältigen).

Zeichnet man beide Funktionen sieht das so aus:



Wir stellen fest, da in der Türkei die Ansteckung schneller geht, überholt die Türkei eines Tages Bayern. Wir stellen uns die Frage, an welchem Tag die Türkei Bayern überholt. Mathematisch heißt das, dass wir den Schnittpunkt der Graphen bestimmen.

Die Gleichung lautet wie folgt:

$$\begin{aligned}
 f_{\text{Bayern}}(x) &= g_{\text{Türkei}}(x) \\
 31 \cdot 1,35^x &= 1 \cdot 2,14^{(x-10)} \\
 31 \cdot 1,35^x &= \frac{2,14^x}{2,14^{10}} && \quad \cdot 2,14^{10} \\
 31 \cdot 1,35^x \cdot 2,14^{10} &= 2,14^x && \quad \div : 1,35^x \\
 31 \cdot 2,14^{10} &= \frac{2,14^x}{1,35^x} \\
 31 \cdot 2,14^{10} &= \left(\frac{2,14}{1,35}\right)^x \\
 \Rightarrow \log_{\frac{2,14}{1,35}}(31 \cdot 2,14^{10}) &= x \\
 x &\approx 24 \quad (\text{Tage})
 \end{aligned}$$

Das bedeutet, dass die Türkei am 26. März mehr Fälle haben sollte, obwohl die Krankheit dort erst später ausgebrochen ist.

An diesem Beispiel merken wir uns die Vorgehensweise beim Lösen von Exponentialgleichungen:

1. Gleichung umstellen, so dass auf einer Seite alle Potenzen (mit Variable x) stehen und auf der anderen Seite alle Zahlen.
2. Lösen der Gleichung mit dem Logarithmus.

Beim Lösen der Gleichungen werden oft die Potenzgesetze benötigt, wie man oben gesehen hat.

Weitere Beispiele:

a) $15 \cdot 2^x = 5^{(x+3)}$

b) $3 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x = 9$

c) $12 \cdot 4^x - 12 \cdot 2^x = 24$ (Hinweis: Substitution)

Lösungen:

$$15 \cdot 2^x = 5^{(x+3)}$$

$$15 \cdot 2^x = 5^x \cdot 5^3 \quad \vdots : 5^3$$

$$\frac{15 \cdot 2^x}{5^3} = 5^x \quad \vdots : 2^x$$

a)

$$\frac{15}{5^3} = \frac{5^x}{2^x}$$

$$\frac{3}{25} = \left(\frac{5}{2}\right)^x \Leftrightarrow 0,12 = 2,5^x \Rightarrow x = \log_{2,5}(0,12)$$

$$3 \cdot 3^x + 5 \cdot 3^x = 9$$

$$3^x \cdot (3+5) = 9$$

$$3^x \cdot 8 = 9 \quad \vdots : 8$$

b)

$$3^x = \frac{9}{8}$$

$$x = \log_3\left(\frac{9}{8}\right)$$

$$12 \cdot 4^x - 12 \cdot 2^x = 24 \quad \vdots : 12$$

$$4^x - 2^x = 2 \quad \vdots : -2$$

$$(2^2)^x - 2^x - 2 = 0$$

$$\text{Substitution: } a = 2^x$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 2 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2)}}{2 \cdot 1}$$

c)

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{2}$$

$$\Rightarrow a_1 = 2 \quad \Rightarrow a_2 = -1$$

$$\Rightarrow (\text{Rücksubstitution}) a_1 = 2^x \Leftrightarrow 2 = 2^x \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\Rightarrow (\text{Rücksubstitution}) a_2 = 2^x \Leftrightarrow -1 = 2^x \Rightarrow x_2 = \log_2(-1) \Rightarrow \text{existiert nicht}$$

Aufgaben zum Üben: (oder mathegym)

Empfohlen:

Buch S. 84/2/3/6

Weitere Aufgaben:

Buch S. 84/4/5/7/8

Buch S. 85/9/10/11/12/13/14