5.3 Bruchgleichungen

Bruchterme können auch in Gleichungen auftreten. Wir überlegen uns an einem Beispiel, wie man solche Gleichungen lösen kann.

Beispiel:

$$\frac{x-5}{x} = \frac{x+4}{x-1}$$

Die erste Überlegung ist, welche Zahlen die Gleichung nicht lösen können. Im Nenner beider Brüche darf keine Null stehen. Daher rechnen wir zuerst die Werte aus, für die der Nenner Null wird.

Linke Seite: $x=0$

Rechte Seite:
$$\begin{aligned} x-1 &= 0 \quad \vdots +1 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Damit wissen wir, dass unsere Lösungsmenge aus der Definitionsmenge $D_{max}=\mathbb{Q}\setminus\{0;1\}$ stammen muss.

Offensichtlich stört bei der Bruchgleichung der Nenner. (Gleichungen ohne Nenner können wir bereits lösen.) Also ist der Trick, einfach mit beiden Nennern zu multiplizieren:

$$\begin{aligned}
\frac{x-5}{x} &= \frac{x+4}{x-1} && \vdots \cdot x \\
\frac{x-5}{x} \cdot x &= \frac{x+4}{x-1} \cdot x \\
\frac{(x-5)\cdot x}{x} &= \frac{(x+4)\cdot x}{x-1} \\
(x-5) &= \frac{(x+4)\cdot x}{x-1} && \vdots \cdot (x-1) \\
(x-5) \cdot (x-1) &= \frac{(x+4)\cdot x}{x-1} \cdot (x-1) \\
(x-5) \cdot (x-1) &= \frac{(x+4)\cdot x \cdot (x-1)}{x-1} \\
(x-5) \cdot (x-1) &= (x+4)\cdot x
\end{aligned}$$

Ab hier können wir die Rechnung auflösen, wie wir es gewohnt sind:

$$\begin{aligned}
(x-5) \cdot (x-1) &= (x+4)\cdot x \\
x\cdot x - x\cdot 1 - 5\cdot x + 5\cdot 1 &= x\cdot x + 4\cdot x \\
x^2 - 6x + 5 &= x^2 + 4x && \vdots -x^2 \\
-6x + 5 &= 4x && \vdots +6x \\
5 &= 10x && \vdots :10 \\
\frac{1}{2} &= x
\end{aligned}$$

Da die Lösung in unserer Definitionsmenge enthalten ist gilt: $L=\{\frac{1}{2}\}$

Merke: Bruchgleichungen löst man, indem man die Gleichung mit allen Nennern multipliziert.

Beispiele: (Versuche zuerst selber zu rechnen und dann zu vergleichen. Lösungen ganz am Ende des Hefteintrages.)

Hinweis: Ausmultiplizieren am besten erst dann, wenn man mit allen Nennern durchmultipliziert hat.

a) $\frac{12-2x}{x+3} = \frac{15-2x}{x}$

b) $\frac{-3x-16+x^2}{x(x+4)} = \frac{x-6}{x+4}$

c) $\frac{10}{4x+4} + \frac{4}{x+1} - \frac{3}{5-x} = 0$

Empfohlene Aufgaben: Buch S.124/3 Buch S.125/6/10

Weitere Aufgaben: Buch S.124/4
Buch S.125/5/7/8/9
Buch S.126/11/12/13/15/16/17/18/19/20
Buch S.127/21/22/23/24/25

Lösungen:

a) $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{-3; 0\}$

$$\frac{12-2x}{x+3} = \frac{15-2x}{x} \qquad \vdots \cdot x$$
$$\frac{12-2x}{x+3} \cdot x = \frac{15-2x}{x} \cdot x$$
$$\frac{(12-2x)\cdot x}{x+3} = \frac{(15-2x)\cdot x}{x}$$
$$\frac{(12-2x)\cdot x}{x+3} = (15-2x) \qquad \vdots \cdot (x+3)$$
$$\frac{(12-2x)\cdot x}{x+3} \cdot (x+3) = (15-2x)\cdot(x+3)$$
$$\frac{(12-2x)\cdot x\cdot(x+3)}{x+3} = (15-2x)\cdot(x+3)$$
$$(12-2x)\cdot x = (15-2x)\cdot(x+3)$$
$$12x-2x^2 = 15x + 15\cdot 3 - 2x\cdot x - 2x\cdot 3$$
$$12x-2x^2 = 9x + 45 - 2x^2 \qquad \vdots +2x^2$$
$$12x = 9x + 45 \qquad \vdots -9x$$
$$3x = 45 \qquad \vdots :3$$
$$x = 15$$

b) $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{-4; 0\}$

$$\frac{-3x-16+x^2}{x(x+4)} = \frac{x-6}{x+4} \qquad \vdots \cdot (x+4)$$
$$\frac{-3x-16+x^2}{x(x+4)} \cdot (x+4) = \frac{x-6}{x+4} \cdot (x+4)$$
$$\frac{(-3x-16+x^2)\cdot(x+4)}{x(x+4)} = \frac{(x-6)\cdot(x+4)}{x+4}$$
$$\frac{(-3x-16+x^2)}{x} = (x-6) \qquad \vdots \cdot x$$
$$\frac{(-3x-16+x^2)}{x} \cdot x = (x-6) \cdot x$$
$$\frac{(-3x-16+x^2)\cdot x}{x} = (x-6) \cdot x$$
$$(-3x-16+x^2) = (x-6) \cdot x$$
$$-3x-16+x^2 = x^2-6x \qquad \vdots - x^2$$
$$-3x-16 = -6x \qquad \vdots + 3x$$
$$-16 = -3x \qquad \vdots : (-3)$$
$$\frac{-16}{-3} = x$$
$$\frac{16}{3} = x$$

c) $D_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{-1; 5\}$

$$\frac{10}{4x+4} + \frac{4}{x+1} - \frac{3}{5-x} = 0 \qquad \vdots \cdot (x+1)$$
$$\left(\frac{10}{4x+4} + \frac{4}{x+1} - \frac{3}{5-x}\right) \cdot (x+1) = 0 \cdot (x+1)$$
$$\frac{10 \cdot (x+1)}{4x+4} + \frac{4 \cdot (x+1)}{x+1} - \frac{3 \cdot (x+1)}{5-x} = 0$$
$$\frac{10 \cdot (x+1)}{4(x+1)} + 4 - \frac{3 \cdot (x+1)}{5-x} = 0$$
$$\frac{10}{4} + 4 - \frac{3 \cdot (x+1)}{5-x} = 0 \qquad \vdots \cdot (5-x)$$
$$\left(\frac{26}{4} - \frac{3 \cdot (x+1)}{5-x}\right) \cdot (5-x) = 0 \cdot (5-x)$$
$$\frac{26}{4} \cdot (5-x) - \frac{3 \cdot (x+1)}{5-x} \cdot (5-x) = 0$$
$$\frac{130}{4} - \frac{26}{4} \cdot x - \frac{3 \cdot (x+1) \cdot (5-x)}{5-x} = 0$$
$$\frac{130}{4} - \frac{26}{4} \cdot x - 3 \cdot (x+1) = 0$$
$$\frac{130}{4} - \frac{26}{4} \cdot x - 3 \cdot x - 3 \cdot 1 = 0$$
$$\frac{130}{4} - \frac{12}{4} - \frac{26}{4}x - \frac{12}{4}x = 0$$
$$\frac{118}{4} - \frac{38}{4}x = 0 \qquad \vdots + \frac{38}{4}x$$
$$\frac{118}{4} = \frac{38}{4}x \qquad \vdots : \frac{38}{4}$$
$$\frac{118}{4} : \frac{38}{4} = x$$
$$\frac{118}{4} \cdot \frac{4}{38} = x$$
$$\frac{59}{19} = x$$